ÉCOLE CENTRALE DU DÉPARTEMENT DE LA CÔTE-D'OR.

EXERCICE
DE MATHÉMATIQUES
SUR

L'Arithmétique, la Géométrie, la Trigonométrie, l'Algèbre et la Méchanique.

RÉPONDRONT

LES CITOYENS

A. G. et T.	MICHEL DEGAND,	*de Langres.*	1er prix.
	DENIS MAULBON,	*de Dijon.*	accessite.
A. G. T. et AL.	FRANÇOIS BOUGAREL,	*de Moulins.*	accessite.
	SÉBASTIEN CHERE,	*d'Offlange.*	2ème prix.
	EDME GIBOU,	*d'Auxonne.*	3ème prix.
	LOUIS-JOSEPH RENAUD,	*de Dijon.*	1er prix.
A. G. T. AL et M.	ANTOINE-ALEXANDRE ARVIER,	*de Vitteaux.*	1er prix égalité.
	ANTOINE BILLOT,	*de Besançon.*	1er prix égalité.
	LOUIS BUZENET,	*de Dijon.*	Second prix
	PLACIDE GENOT,	*de Dijon.*	accessite.

Le 30 thermidor an 7 de la République française, à neuf heures du matin et à trois heures après midi, dans la salle des exercices de l'École centrale.

Nota. Les lettres initiales placées à côté du nom des Élèves, indiquent les objets sur lesquels ils répondront.

A DIJON, DE L'IMPRIMERIE DE L. N. FRANTIN, AN 7.

S. Chere

DE L'ALGEBRE

L'Analyse est l'art de résoudre, par le calcul algébrique, toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités. On y parvient en pesant avec attention les conditions que renferme la question ; elles s'expriment toujours par des quantités connues, et servent à former les équations nécessaires à sa résolution.
On appelle équation, la double expression d'une même quantité.
Il existe une si grande variété dans les questions que l'on peut proposer, qu'il est impossible d'en faire l'énumération.

Dans les unes, on ne cherche qu'une seule quantité inconnue ; dans les autres, on en cherche deux ou plusieurs ; mais on observe, dans ce dernier cas, qu'il faut pour les connaître toutes, que les questions qui les renferment puissent fournir autant d'équations distinctes et indépendantes les unes des autres qu'il y a d'inconnues ; c'est pourquoi on distingue différentes sortes d'équations, savoir : les équations du premier degré à une inconnue, les équations du premier degré à 2, à 3, à 4, et à un nombre quelconque d'inconnues.
Une équation est dite du 1er degré, lorsqu elle ne renferme que la première puissance de l'inconnue ; mais lorsqu'on y rencontre la seconde puissance ou son quarré, alors l'équation est dite du second degré ; après cela viennent les équations du 3^{e} degré, ce sont celles qui contiennent la 3^{e} puissance de l'inconnue ou son cube, etc.

De la résolution des équations du 1er degré.

La résolution de ces équations est fondée sur des règles si simples, que nous les ferons mieux connoître en les appliquant à la solution des questions suivantes.
1. Connoissant la somme de deux quantités et leur différence, trouver chacune d'elles.
2. Partager un nombre donné en plusieurs parties qui soient proportionnelles à d'autres nombres aussi donnés.
3. Quel est le nombre dont le tiers, le quart et les trois cinquièmes réunis surpassent ce nombre de 11 ?
4. Un particulier engage un ouvrier pour trois décades, et lui promet 2 francs 20 centimes chaque jour qu'il viendra travailler ; mais à condition qu'il lui retiendra sur son gain autant de fois 80 centimes qu'il sera de jours à ne rien faire : les trois décades expirées, il lui fait son compte, et il reçoit 42 francs. On demande combien il a travaillé de jours.
5. Connoissant les pesanteurs spécifiques de deux matières dont un corps mixte est composé, ainsi que le poids et le volume de ce corps, déterminer la quantité de chacune des deux matières qui entrent dans la composition de ce corps.
6. Étant donné l'intervalle des deux lieux d'où sont partis deux couriers, le nombre d'heures dont le départ du premier a précédé celui du second, trouver à quelle distance de l'un de ces deux lieux le second rencontrera le premier, soit qu'ils aillent dans le même sens, ou qu'ils viennent à la rencontre l'un de l'autre, en supposant que le premier fait m de lieues en n d'heures, et que le second fait p de lieues en q d'heures.
7. Trois citoyens jouent ensemble trois parties. Dans la première, le premier perd avec chacun des deux autres autant d'écus qu'ils en ont en entrant au jeu ; dans la seconde, c'est le second qui perd avec le premier et le troisième, autant d'écus qu'ils en ont à la fin de la première partie ; enfin, le troisième perd à la fin de la troisième partie, autant d'argent que le premier et le second en ont à la fin de la seconde. La troisième partie finie, chacun des joueurs se retire avec le même nombre d'écus. On demande combien chacun d'eux avait d'argent en entrant au jeu.

Des équations du second degré

Toute équation du second degré peut être exprimée généralement par cette formule :
$x^2 + ax + b = 0$
et donne, étant résolue, les deux valeurs suivantes :

$$x = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

qui sont toutes deux négatives et réelles, lorsque $\frac{a^2}{4} > b$, elles sont imaginaires si $\frac{a^2}{4} < b$.

Si on suppose a négatif, les deux valeurs de l'inconnue sont positives ; et elles sont réelles ou imaginaires, selon que $\frac{a^2}{4}$ est plus grand ou plus petit que b. Lorsque b est négatif, les deux valeurs de x sont toujours réelles, mais l'une est positive, et l'autre négative, soit que a soit positif ou négatif.

Si a = 0, alors les deux valeurs de x sont $\pm\sqrt{-b}$, lorsque b a le signe + dans l’équation, et elles sont $\pm\sqrt{b}$ si b a le signe - ; enfin lorsque b est 0, l’une des valeurs de x est zéro, et l’autre est égale au coefficient de la première puissance de l’inconnue, pris avec un signe contraire. On voit donc comment, à l’inspection seule de ces sortes d’équations, on peut juger des valeurs de l’inconnue.

PROBLEMES

1. Un réservoir reçoit de l’eau par trois tuyaux ; lorsqu’elle s’écoule par le second, il lui faut pour remplir le réservoir, les trois quarts du temps qu’elle emploie à s’écouler par le premier ; mais si elle s’échappe par le troisième, le réservoir peut être rempli dans un temps moitié moindre que par le second, et deux heures de plus. Déterminer le temps qu’il faut pour remplir le réservoir, lorsque l’eau coule séparément par chacun des tuyaux, en supposant que lorsque les trois tuyaux coulent ensemble, ils peuvent remplir le réservoir en huit heures.
2. Deux citoyens ont placé à intérêt 108 louis ; le premier a placé ses fonds pendant 4 mois, et le second a placé les siens pendant dix mois ; chacun d’eux retire 72 louis, tant pour ses fonds que pour son bénéfice. On demande quels sont les fonds qu’ils ont placés.
3. Connoissant les degrés de clarté que répandent deux corps lumineux à une distance connue, déterminer sur la ligne qui les joint le point également éclairé par chacun d’eux, en supposant ce principe d’optique que l’intensité de lumière d’un corps croît comme le quarré de sa distance diminue, ou décroît comme le quarré de sa distance augmente.
4. Un marchand achète 3588 francs la coupe d’un certain nombre d’arpens de bois ; s’il en eût eu un de plus pour le même prix, chaque arpent lui auroit coûté 23 f. de moins ; on demande combien il a acheté d’arpens.

Il y a dans les degrés supérieurs une classe très étendue d’équations qui se résolvent à la manière de celles du second degré ; elles peuvent être toutes représentées par celle-ci :
$x^{2p} + ax^p + b = 0$

La solution générale de cette équation donne $x = \sqrt[p]{-a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}}$

De la résolution des équations du troisième degré

Quoiqu’on puisse résoudre une équation du troisième degré qui a tous ses termes, on préfère néanmoins de la transformer en une autre qui n’ait pas de second terme, parce que les calculs sont plus simples.

On transforme une équation d'un degré quelconque en une autre qui n'a pas de second terme , en substituant dans cette équation à la place de l'inconnue et de ses puissances, une autre inconnue augmentée ou diminuée du coefficient du second terme divisé par l'exposant du premier, selon que le second terme a le signe - ou le signe +.
Soit donc l'équation générale du 3e degré $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$,
en la transformant comme il vient d'être dit, on aura une équation de cette forme,
$x^3 + ax + b = 0$, laquelle étant résolue donnera pour l'inconnue les trois valeurs suivantes :

$$x = \sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{b^2/4+a^3/27}} + \sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{b^2/4+a^3/27}}$$

$$x = -½\sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{b^2/4+a^3/27}} - ½\sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{b^2/4+a^3/27}} + \left(\sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{b^2/4+a^3/27}} - \sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{b^2/4+a^3/27}}\right)\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = -½\sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{b^2/4+a^3/27}} - ½\sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{b^2/4+a^3/27}} - \left(\sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{b^2/4+a^3/27}} - \sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{b^2/4+a^3/27}}\right)\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

De ces trois valeurs on conclut, 1° que lorsque a et b sont positives, la première valeur est réelle et négative, et les deux autres négatives et imaginaires. 2° Si b est négative, la première valeur est réelle et positive, et les deux autres négatives et imaginaires. 3° si a est négative, $a^3/27 < b^2/4$, la première sera encore réelle, et les deux autres imaginaires. 4° Enfin, lorsque a étant toujours négative, $a^3/27 > b^2/4$, alors les trois valeurs de l'inconnue se présentent sous des formes imaginaires : quoiqu'on soit assuré que, dans ce cas, les trois valeurs de x sont réelles et incommensurables, ce cas est appelé le cas irréductible des équations du troisième degré[1].

Si l'on suppose a = 0, l'équation se réduit à $x^3 + b = 0$, d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{-b}$
Problème relatif à ce cas :
Une femme échange avec une autre des poulets pour des poules, et donne trois poulets pour deux poules. Quelque temps après, chaque poule a pondu la moitié autant d'œufs qu'il y a de poules; cette femme vend au marché six œufs pour autant de sous qu'une poule a pondu d'œufs, et elle retire de la totalité 41 sous 8 deniers. On demande combien elle a échangé de poulets ?

Des équations du quatrième degré.

Toute équation du 4e degré, privée de son second terme, peut être représentée généralement par $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. En la considérant comme formée de la multiplication du facteur trinôme $x^2 + px + q$ par $x^2 - px + r = 0$, on aura alors une équation du 4e degré qui, comparée terme à terme à la première, fourniront trois équations qui serviront à faire connoître les trois indéterminées p, q, r. Substituant les valeurs de ces quantités dans les deux facteurs trinômes du second degré, et résolvant ensuite chacune de ces équations, on aura les quatre valeurs de l'inconnue x.
Nous remarquerons que la résolution des équations du quatrième degré dépend de celle du troisième, vu que pour déterminer la quantité p, on est conduit à une équation du sixième, qui se résout à la manière de celles du troisième.

Théorie des équations.

[1] Note de la présente édition : cette phrase est confuse. Si comme dans le reste du texte on donne à l'adjectif 'imaginaire' son sens habituel du XVIIIe siècle c'est-à-dire complexe non réel, il y a une contradiction. D'autre part et surtout, on sait qu'une équation du 3e degré a toujours au moins une solution réelle, donc le cas de 3 solutions complexes non réelles ne peut pas se présenter. Ou est-ce une façon de dire que l'auteur doute de la formule ?

Une équation d'un degré quelconque peut toujours être considérée comme étant le produit d'autant de facteurs binomes qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue, et chacun de ces facteurs est formé de l'inconnue et de chacune des valeurs prise avec un *signe* contraire. Ces facteurs binomes sont appelés les racines de l'équation ; d'où il suit que le coefficient du second terme exprime la somme des valeurs de l'inconnue prise avec un signe contraire ; le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits différens des valeurs de l'inconnue, multipliés deux à deux ; celui du quatrième est égal à la somme des produits différens des valeurs de l'inconnue, multipliés trois à trois, et ainsi de suite ; enfin, le dernier terme est le produit de toutes les valeurs de l'inconnue.
De ce que le dernier terme est le produit de toutes les valeurs de l'inconnue, il est clair que si elles sont toutes commensurables, ou s'il y en a quelques unes qui le soient, elles seront des diviseurs exacts de ce terme.
On a deux moyens pour reconnoître, parmi les diviseurs du dernier terme, ceux qui sont les valeurs de l'inconnue : nous les indiquerons.
Lorsqu'une équation a des diviseurs, on les élimine sans donner de coefficient à la plus haute puissance de l'inconnue, en substituant à la place de l'inconnue une autre inconnue divisée par le produit de tous les diviseurs.
Cette, préparation est nécessaire, lorsque l'équation que l'on vent résoudre, doit donner pour l'inconnue des valeurs fractionnaires.
Mais, lorsque les valeurs de l'inconnue sont incommensurables, on ne peut les avoir que par approximation.
Elever un binome à une puissance quelconque.

De la résolution des équations indéterminées du premier degré à plusieurs inconnues.

Lorsqu'une question ne renferme pas autant de conditions que d'inconnues, il y en a de celles-ci qui restent indéterminées, et on donne à ces questions le nom de problèmes indéterminés ; comme on peut prendre pour une ou pour plusieurs inconnues des nombres à volonté, ils admettent aussi plusieurs solutions : mais comme on exige ordinairement que les nombres cherchés soient des nombres entiers et positifs, le nombre des solutions se trouve alors borné ; en sorte qu'il peut arriver souvent qu'il y en ait très peu de possibles.

PROBLEMES.

1. Partager le nombre 31 en deux parties : l'une exactement divisible par 2, et l'autre par 3.
2. Deux citoyens ont ensemble 200 écus. Lorsque le premier compte ses écus par douzaine, il lui en reste 5, et le second comptant les siens par dixaine, il lui en reste 7 : combien en ont-ils l'un et l'autre ?
3. Quel est le nombre exactement divisible par 6, et qui, divisé par 4, donne 3 de reste ?
4. En combien de manières peut-on payer 9 francs, en donnant des pièces de 24 sous, et en recevant en échange des pièces de 5 sous ?

Des progressions

Une progression est une suite de termes qui croissent ou décroissent dans un rapport constant.
On en distingue de deux sortes : la progression arithmétique et la progression géométrique.
Un terme quelconque d'une progression arithmétique est égal au premier, plus ou moins la différence, répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui.
Un terme quelconque d'une progression géométrique est égal au premier multiplié par la raison, autant de fois facteur qu'il y a de termes avant lui.

La somme de tous les termes d’une progression arithmétique est égale à la -somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

PROBLEMES

1. Insérer entre deux nombres donnés un certain nombre de moyens arithmétiques ou géométriques.
2. Trouver la somme des quarrés, des cubes et de toute autre puissance de plusieurs nombres en progression arithmétique. Application de cette méthode à la recherche des nombres triangulaires, pentagones, exagones, etc.
3. Calculer le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire ou quadrangulaire, connaissant le nombre des boulets d'un des côtés de la base.
4. Déterminer le nombre des boulets contenus dans une pile oblongue.
5. Un nombre quelconque de boulets étant donné, les disposer en pile triangulaire ou quadrangulaire.

Pour avoir la somme de tous les termes d’une progression géométrique croissante, il faut du produit du dernier terme par la raison retrancher le premier terme, et diviser le reste par la raison diminuée d'une unité.
Si la progression est décroissante à l’infini, cette somme est égale au quarré du premier divisé par la différence des deux premiers.

Un capital de 1000 écus a été placé à 5 pour 100. Supposons qu’à la fin de la première année on joigne l'intérêt au capital, afin de retirer, l’année suivante l’intérêt de ce nouveau fonds, et qu’on continue de la même manière en ajoutant l'intérêt échu au capital de l’année précédente ; on demande combien on doit attendre d'années, sans rien toucher pour que le capital de 1000 écus soit doublé ?
Rembourser un capital en un certain nombre de paiemens égaux, en y comprenant les intérêts de chaque année.

Application de l'algèbre à la géométrie.

PROBLEMES

1. Calculer la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés.
2. Trouver la solidité d'un segment sphérique.
3. Evaluer la solidité d’une pyramide tronquée à bases opposées parallèles.
4. Inscrire un quarré dans un triangle donné.
5. Connoissant les hauteurs de deux objets par rapport à un plan, et leur distance mesurée parallèlement à ce plan, trouver sur cette distance le point également éloigné des sommets des deux objets.
6. Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, mener une ligne droite qui les touche.
7. Une droite étant donnée, la couper en moyenne et extrême raison.
8. D’un point donné hors d’un cercle donné de grandeur et de position, mener une sécante de manière que la partie de cette ligne comprise dans le cercle, soit égale à une ligne donnée.
9. Un quarré étant donné, mener d'un de ses angles une ligne droite telle que la partie de cette ligne comprise entre un des côtés et le prolongement du côté contigu à celui-là soit égale à une ligne donnée.
10. Deux cercles qui se touchent intérieurement étant donnés, en décrire un autre qui les touche, et qui ait pour tangente la perpendiculaire élevée à l'extrémité du diamètre du plus petit.

11. Deux droites qui se coupent étant données de position, mener, par un point donné, une ligne qui forme, avec les deux premières, un triangle égal à une surface donnée.
12. Diviser un triangle en deux parties égales par une parallèle à un de ses côtés.

Des sections coniques.

Lorsqu'on coupe un cône par un plan qui passe par son axe, la section est un triangle ; si le plan est parallèle à la base, la section est un cercle ; si le plan, en coupant le cône, coupe les deux côtés du triangle, la section est une ellipse ; mais s'il coupe un côté et le prolongement de l'autre au-delà du sommet, la section est une hyperbole. Enfin, lorsque le plan est parallèle à un côté du triangle, la section est une parabole : le plan, dans tous les cas, est supposé perpendiculaire à celui du triangle.

Propriétés, et définitions de ces courbes, lorsqu'on les considère tracées sur un plan.

La parabole est une courbe, dont chacun de ses points est autant éloigné d'un point fixe appelé foyer que d'une droite donnée de position et qu'on nomme la directrice.
Le quarré d'une ordonnée quelconque est égal au rectangle de l’abscisse correspondante par le paramètre de l’axe.
On appelle paramètre la double ordonnée menée par le foyer.
La sous-tangente est double de l'abscisse et la sous-normale est égale à la moitié du paramètre.
Le diamètre d'une parabole est une ligne droite, menée d’un point quelconque de la courbe parallèlement à l'axe.
Le paramètre d'un diamètre est égal à quatre fois la distance du sommet de ce diamètre au foyer.
La parabole a par rapport à l’un quelconque de ses diamètres la même propriété que par rapport à l’axe.
D'écrire une parabole d'un mouvement continu, étant donné la direction d'un diamètre, son paramètre et l’angle que les ordonnées doivent faire avec ce diamètre.
L'ellipse est une courbe, dont la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes appelés les foyers est partout la même, et égale au grand axe. Dans cette courbe, le quarré d’une ordonnée quelconque est égal au rectangle des abscisses qui lui correspondent, multiplié par le rapport du quarré du petit axe, au quarré du grand.
Le paramètre est la double ordonnée qui passe par l’un des foyers, il est plus petit que le quadruple de la distance d’une des extrémités de l’axe au foyer le plus près.
Le petit axe est moyen proportionnel entre le grand axe et son paramètre, et sa moitié est moyenne proportionnelle entre les deux distances d’un même foyer aux deux extrémités de l'axe.
La sous-tangente est égale au rectangle des abscisses, divisé par la distance du centre à l’ordonnée.
La sous-normale est égale à la distance du centre à l’ordonnée multipliée par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand.
Le diamètre d’une ellipse est une ligne qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre à cette courbe.
L’ellipse a, par rapport à ses diamètres, les mêmes propriétés qu’à l’égard de ses axes.
Le parallélogramme formé par les tangentes menés aux extrémités d’un diamètre et de son conjugué est égal au rectangle des axes.
La somme de quarrés d’un diamètre et de son conjugué est égale à la somme des quarrés des deux axes.
Le rectangle des deux parties de la tangente menée à l'extrémité d’un diamètre, et terminée par les prolongemens des axes, est égal au quarré de la moitié du diamètre conjugué, ou au produit de la moitié du premier diamètre par la moitié de son paramètre.

Etant donné un diamètre et son conjugué avec l'angle que les ordonnées doivent faire avec l'un d'eux, décrire l'ellipse *d'un mouvement continu*.
L'hyperbole est une courbe qui, dans chacun de ses points, jouit de la propriété suivante ; savoir : que si on mène à deux points fixes nommés foyers, deux droites, la différence de ces lignes est constamment la même, et égale au premier axe. Cette courbe a, relativement à son premier axe, les mêmes propriétés que l'ellipse, mais son équation, par rapport au second axe, st différente.
La longueur du second axe dans cette courbe se détermine, soit en cherchant une moyenne proportionnelle entre le premier axe et son paramètre, ou une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux extrémités de l'axe ; dans ce dernier cas on n'obtient que la moitié du second axe : on remarque que la ligne qui joint les extrémités des deux axes est égale à la distance du centre à l'un des foyers.
Le paramètre d'un des axes est une troisième proportionnelle à cet axe et à l'autre.
Les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale sont les mêmes dans l'hyperbole que dans l'ellipse.
Le diamètre d'une hyperbole est une ligne qui passe par le centre, et qui se termine de part et d'autre aux deux hyperboles opposées.
Le diamètre conjugué, est une parallèle à la tangente qui passe par l'extrémité du premier ; on en détermine la longueur en menant par les extrémités du premier des parallèles à l'une des assymptotes.
On entend par assymptotes d'une courbe, des droites qui ne rencontrent les branches de la courbe qu'à des distances infinies : pour mener les assymptotes d'une hyperbole, on élève une perpendiculaire à l'une des extrémités du premier axe, sur laquelle on prend de part et d'autre du sommet, des parties égales à la moitié du second axe. Ce qui détermine deux points, par lesquels et le centre on mène des lignes qui sont les assymptotes.
Le parallélogramme formé par les tangentes, terminées par des parallèles à l'une des assymptotes est égal au rectangle des axes.
La différence des quarrés du diamètre et de son conjugué est égale à la différence des quarrés des axes.
Le rectangle des deux tangentes, comptées du même point de la courbe jusqu'à la rencontre des axes, est égal au quarré de la moitié du diamètre conjugué ou au rectangle de la moitié du premier diamètre par la moitié de son paramètre.
Etant donné un diamètre de l'hyperbole et son conjugué avec l'angle que les ordonnées doivent faire avec l'un d'eux, décrire l'hyperbole d'un mouvement continu.

Des propriétés de l'hyperbole entre ses assymptotes.

1. Les parties d'une ligne droite quelconque terminées par les assymptotes, et comprises entr'elles et les branches de la courbe, sont égales.
2. Le rectangle des deux parties de cette ligne comptées d'un même point jusqu'aux assymptotes, est égal au quarré de la moitié de la tangente, parallèle à cette même ligne, et terminée par les assymptotes.
3. Cette tangente est égale au diamètre conjugué.

Si de différents points de l'hyperbole on mène des parallèles aux assymptotes jusqu'à leur rencontre, les produits des côtés contigus des parallélogrammes ainsi formés, seront égaux entr'eux. De cette propriété on en tire l'équation de cette courbe ; savoir : que le rectangle des coordonnées est égal à une quantité constante appellée la puissance de l'hyperbole.

De la Méchanique.

La méchanique est une science qui a pour objet les lois du mouvement et de l'équilibre.

Le mouvement a lieu dans un corps, toutes les fois qu'il change de place : or, pour opérer ce changement, il faut qu'il quitte l'espace qu'il occupe, et qu'après avoir parcouru les espaces intermédiaires, il arrive enfin à celui qu'il doit occuper.
L'idée du mouvement renferme trois objets principaux, savoir : l'espace parcouru, le temps employé à le parcourir et le rapport de l'espace au temps, qu'on appelle la vitesse.
On distingue deux sortes de mouvemens : le mouvement uniforme et le mouvement varié.
Le mouvement uniforme est celui d'un corps qui se meut toujours de la même manière, c'est-à-dire qui dans des intervalles de temps égaux parcourt des espaces égaux.
Dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru est égal au produit de la vitesse par le temps.
Le temps est égal à l'espace parcouru divisé par la vitesse, et la vitesse est égale à l'espace divisé par le temps.
Les espaces parcourus par deux corps sont en raison composée du rapport des vitesses et de celui des temps.
Les temps sont proportionnels aux espaces divisés par les vitesses, et les vitesses sont entr'elles comme les espaces divisés par les temps ; donc, 1° Si les espaces parcourus sont égaux, les vitesses seront entr'elles réciproquement comme les temps mis à les parcourir. 2° Si les vitesses sont égales, les espaces seront proportionnels aux temps. 3° Si les temps sont égaux, les espaces sont comme les vitesses. 4° Si les temps sont proportionnels aux vitesses, les espaces sont entr'eux dans le même rapport que les quarrés des vitesses ou des temps, etc.
Lorsqu'un corps reçoit à différens intervalles, qui peuvent être égaux ou inégaux, des impulsions quelconques, il est dit mû d'un mouvement varié.
Nous ne considérons ici que le mouvement imprimé au corps en vertu d'impulsions égales, et nous supposerons qu'il les reçoit à des intervalles de temps égaux.
Tout corps qui reçoit des impulsions égales à des intervalles de temps égaux, est dit mû d'un mouvement uniformément accéléré, et la cause qui agit ainsi sur lui est appelée force accélératrice, constante.
La vitesse acquise par le corps en vertu d'une semblable force, est égale à la vitesse initiale, multipliée par le nombre des intervalles de temps écoulés.
L'espace parcouru est égal à la vitesse acquise, multipliée par la moitié du temps ; ou à la vitesse initiale, multipliée par la moitié du quarré du temps, lorsqu'on suppose que la force accélératrice agit à chaque instant sur le corps, c'est-à-dire sans interruption, et qu'elle lui communique des degrés de vitesse infiniment petits.
Lorsqu'un corps se meut d'un mouvement continuellement et uniformément accéléré, il acquiert une vitesse telle que s'il venait à être abandonné à lui-même, il serait capable de parcourir, en vertu de cette vitesse, continuée uniformément, et dans un temps égal, un espace double de celui qu'il a parcouru, pendant la durée de l'accélération.
Les vitesses acquises croissent comme les temps écoulés depuis le commencement du mouvement.
Les espaces parcourus sont comme les quarrés des vitesses et comme les quarrés des temps employés à les parcourir, etc.
Telles sont les lois de la chute verticale des corps pesants, découvertes par Galilée, et confirmées par l'expérience.

PROBLEMES

Connaissant le temps qu'un corps a employé à descendre verticalement, déterminer la vitesse qu'il a acquise, et la hauteur d'où il est tombé.
Connoissant la hauteur d'où un corps est descendu, déterminer le temps qu'il a employé à parcourir cette hauteur, et la vitesse qu'il a acquise.
Trouver de quelle hauteur un corps devroit tomber pour acquérir une vitesse donnée.

Un corps qui est mû le long d'un plan incliné à l'horizon, n'obéit pas pleinement à l'action de la pesanteur : une partie de cette force est employée à presser le corps le long du plan, tandis que l'autre le fait glisser le long du plan. Cette dernière est à la pesanteur absolue comme la hauteur du plan est à sa longueur. Ainsi un corps qui glisse le long d'un plan incliné, descend d'un mouvement continuellement et uniformément accéléré.
Si deux corps tombent, l'un le long de la verticale ou de la hauteur d'un plan incliné, l'autre en suivant la longueur de ce plan, ces deux corps, parvenus à l'horizon, auront acquis des vitesses égales, et les temps nécessaires pour parcourir ces espaces seront dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur.

Du mouvement composé.

On appelle mouvement composé celui que prend un corps sollicité par plusieurs forces.
Lorsque deux puissances agissent en même temps sur le même corps selon des directions différentes, il parcourt la diagonale d'un parallélogramme, dont les côtés pris sur leurs directions, sont entr'eux dans le même rapport que ces puissances ; réciproquement un corps qui décrit une ligne droite, peut être considéré comme s'il était animé de deux forces dirigées et représentées par les côtés contigus d'un parallélogramme qui auroit pour diagonale cette ligne.
Si le mobile est sollicité au mouvement par un plus grand nombre de forces qui agissent selon des directions différentes, il prendra une route moyenne résultante de toutes ces forces combinées.
Trouver la résultante de plusieurs forces qui agissent dans un même plan, ou dont les directions concourent en un même point.
Déterminer la résultante de plusieurs forces parallèles, soit qu'elles agissent dans le même sens ou en sens contraire.

Des momens

On appelle moment d'une force, le produit de cette force par sa distance à un point fixe , à une ligne ou à un plan.
Les momens sont du plus grand usage dans la méchanique : on s'en sert non-seulement à déterminer la position des centres de gravité des corps, mais encore à fixer les conditions de l'équilibre, lorsqu'on emploie les machines pour transmettre aux corps l'action des puissances destinées à vaincre les résistances qu'ils opposent.
Quels que soient le nombre et les directions des puissances qui agissent sur un corps ou sur un système de corps, le moment de la résultante est égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de toutes celles qui tendent à faire tourner dans un sens contraire.
Cette proposition, une fois démontrée, il est facile de conclure que la résultante de plusieurs forces parallèles dirigées ou non dans un même plan, est égale à la somme des forces qui agissent dans un sens moins la somme de celles qui agissent en sens contraire.
Le centre de gravité d'un corps ou d'un système quelconque de corps, est un point par lequel passe la résultante de tous les efforts particuliers que fait chaque partie du corps on du système, en vertu de sa pesanteur, dans quelque situation qu'il soit placé : nous ferons voir qu'il existe un tel point dans tous les corps.
Lorsque l'on veut déterminer le centre de gravité d'un système de points pesans, situés dans un même plan, il faut prendre la somme des momens de tous ces points pesans, par rapport à deux droites qui se coupent dans ce plan ; diviser chacune de ces sommes par la somme des points pesans, on aura par ce moyen les distances du centre de gravité à chacune de ces lignes ; il sera facile alors de fixer dans le plan la position de ce centre : mais si les points pesans sont situés

dans différents plans, il faudra prendre les momens de ces points par rapport à trois plans, et diviser la somme de leurs momens par la somme de tous les points pesans, on aura les trois distances du centre de gravité aux trois plans ; ces distances étant connues, il sera facile de déterminer dans l'espace la position de ce centre.

PROBLEMES

Trouver le centre de gravité du contour et de la surface d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un trapèze, d'un polygone régulier ou irrégulier, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, etc.
Lorsque plusieurs corps se meuvent uniformément selon des lignes droites parallèles, le centre commun de gravité décrit aussi uniformément une ligne qui leur est parallèle , et la quantité de mouvement de ce centre est égale à la somme des quantités de mouvemens de ceux qui vont dans un sens moins la somme des quantités de mouvemens de ceux qui vont en sens contraire.
Déterminer la vitesse et la direction que suit le centre de gravité d'un système de corps mus uniformément selon des directions quelconques.

Des machines qui servent à modifier le mouvement.

Les besoins de la société ont fait chercher les moyens d'employer avec avantage les forces que la nature a mises à notre disposition ; cette recherche a produit les machines qui sont simples ou composées.
Les machines simples sont au nombre de sept, savoir : la machine funiculaire, le levier, la poulie, le tour ou treuil, le plan incliné, la vis et le coin.
L'effet de toutes ces machines se déduit facilement du principe des momens.
Ainsi, dans la machine funiculaire dont chaque nœud assemble trois cordons, les tensions de deux des cordons sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un même point de la direction du troisième. Dans le levier, la puissance et la résistance sont en raison réciproque des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions. L'équilibre de la poulie fixe exige que la puissance soit égale au poids ; mais lorsque la poulie est mobile, la puissance doit être au poids comme le rayon de la poulie est à la sous-tangente de l'arc embrassé par la corde ; d'où il suit que la puissance agit avec le plus d'avantage quand les parties de la corde sont verticales ; mais remarquons que ce qu'on gagne en force, on le perd en temps ; car si cette machine passe du repos au mouvement, il faut que la puissance aille deux fois aussi vite que le poids ; dans le tour, la puissance et le poids sont dans le rapport du rayon du cylindre à celui de la roue.
Lorsqu'une puissance retient un corps en équilibre sur un plan incliné, cette puissance doit être au poids du corps comme le sinus de l'angle d'inclinaison du plan est au cosinus de l'angle que la direction de la puissance fait avec la longueur du plan.
La puissance qui retient un corps à l'aide d'une vis et de son écrou, est au poids de l'écrou et de celui dont il est chargé, comme la hauteur du pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon la distance de l'axe de la vis à la puissance.
Une machine composée n'est qu'un assemblage de différentes machines simples, dont les effets concourent à produire un effet général, qui est en raison composée de tous les effets particuliers.
On appelle moufle l'assemblage de plusieurs poulies dans une même chappe. Lorsqu'on veut élever des poids à l'aide des moufles, on emploie toujours une moufle fixe avec une moufle mobile, dont toutes les poulies sont embrassées par une seule corde. On attache à la chappe de la moufle mobile le poids qui doit être élevé, et la puissance est appliquée à l'une des extrémités de la corde qui enveloppe les poulies des deux moufles. Quant à l'autre extrémité, elle peut être attachée à la chappe de la moufle fixe ou à celle de la moufle mobile. Les conditions de l'équilibre dans cette machine demandent que la puissance soit au poids comme le sinus total est

à la somme des sinus des angles que font toutes les parties de la. corde avec l’horizon.

Parmi les machines qui se rapportent au tour, le cric tient à juste titre le premier rang. Il est un des plus simples instrumens de la méchanique, et on n’en connoît guère qui produise de plus grands effets que lui. Il est composé d'une barre garnie à l’une de ses faces de dents de fer, et qui se meut dans une châsse. Une puissance appliquée à une manivelle fait tourner une petite roue ou pignon, dont les ailes soulèvent les dents de la barre, et font par conséquent monter un poids placé sur la tête du cric. Dans cette machine la puissance doit être au poids comme le rayon du pignon est à celui de la manivelle. On peut augmenter l’effet du cric en ajoutant une roue et un pignon de plus , et dans ce cas la puissance sera au poids que le cric doit soulever, comme le produit des rayons des pignons est au produit du rayon de la roue par celui de la manivelle.

La vis d'Archimède, ou la vis sans fin, ne diffère de la vis ordinaire que par une roue dentée que l'on ajoute à celle-ci, et dont les dents engrènent avec le filet de la vis. Cette roue est garnie ordinairement d’un tambour ou d'un cylindre, autour duquel s’enveloppe une corde qui soutient un poids à son extrémité. Dans cette machine, le poids est à la puissance comme le produit du rayon par la circonférence que décrit la manivelle est au produit de la hauteur du pas de vis par le rayon du tambour.

Nous nous abstiendrons de développer la théorie du coin, parce que l’application de cette théorie à la pratique n'est pas susceptible d’une grande précision, lorsqu’on le considère comme un instrument propre à séparer les parties des corps.